

بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری سهام بر اساس ماتریس کواریانس نوفه‌زدایی شده

شاپور محمدی^۱

استادیار دانشکده مدیریت دانشگاه تهران

محمدعلی خجسته^۲

کارشناس ارشد مدیریت مالی دانشگاه تهران

تاریخ دریافت: ۸۷/۱۱/۲۰

تاریخ تأیید: ۸۸/۰۴/۰۱

چکیده

عدم تطابق رفتار واقعی بازارهای مالی با آنچه تئوری‌های اقتصادی تحت عنوان بازارهای کارا ارائه نموده‌اند، سبب ظهور حوزه‌های مطالعاتی جدیدی مانند اقتصاد و مالی رفتاری (ترکیب اقتصاد و علوم رفتاری) و یا فیزیک اقتصاد شده است تا شاید بتوان از این طریق پاسخ‌های مناسب‌تری به جهت تبیین رفتار بازارهای مالی ارائه داد. هدف مقاله، بررسی امکان کاهش ریسک سبد دارایی‌ها از طریق بکارگیری تئوری ماتریس‌های تصادفی برای شناسایی اطلاعات نوفه‌ای ماتریس کواریانس سهام و تشکیل سبد بهینه دارایی‌ها با استفاده از اطلاعات نوفه‌زدایی شده می‌باشد. ماتریس کواریانس نوفه‌زدایی شده، تبیین‌کننده اطلاعات پایدارتر و با قابلیت انکاء بیشتری از ارتباط موجود بین رفتار سهام می‌باشد. در پژوهش حاضر اطلاعات ۷۰ شرکت پر معامله در بورس اوراق بهادار تهران طی فروردین ۸۳ تا خرداد ۸۷ (شامل ۱۰۲۰ روز معاملاتی) مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نتایج تحقیق نشان می‌دهد، پرتفولیوهای بهینه‌ای که با استفاده از اطلاعات نوفه‌زدایی شده بدست آمده‌اند نسبت به پرتفولیوهای بهینه مبتنی بر اطلاعات تجربی (اطلاعات نوفه‌دار)، به طور معنی‌داری ریسک کمتری دارند و استفاده از تئوری ماتریس‌های رندومی در مدیریت ریسک در بورس اوراق بهادار تهران مفید و مؤثر می‌باشد. توجه به این مسئله به فعالان بازار و مدیران پرتفولیو پیشنهاد می‌گردد. واژگان کلیدی: بهینه‌سازی سبد دارایی‌ها، نوفه، نوفه‌زدایی، ماتریس کواریانس سهام، مدیریت ریسک، تئوری ماتریس‌های تصادفی.

طبقه بندی موضوعی: C61, G11, G14, G17

مقدمه

یکی از اساسی‌ترین و پرچالش‌ترین بحث‌ها در مطالعات اقتصادی، تبیین مکانیسم قیمت‌ها در بازارهای مالی است. با مطالعه سری‌های زمانی در می‌یابیم که در واقعیت رفتار بازارها با اندیشه ایده‌آل بازارهای کارا فاصله دارند و متفاوت از آن عمل می‌کنند. بدلیل وجود این اختلاف بین تئوری‌های کلاسیک اقتصادی و واقعیت رفتار بازار، و برای دستیابی به فهم بهتر مکانیسم حاکم بر بازارهای مالی، حوزه‌هایی نوین و بین رشته‌ای شکل گرفته است، مانند اقتصاد و مالی رفتاری که

1. shmohammadi@gmail.com
2. ma.khojaste@gmail.com

ترکیب مباحث اقتصادی و مالی با علوم رفتاری می‌باشد و یا فیزیک اقتصاد^۱ (یا فیزیک مالی^۲) که ترکیب مباحث اقتصادی و مالی با سیستم‌های پیچیده فیزیک^۳ می‌باشد. به طور کلی در سیستم‌های پیچیده عناصر تشکیل‌دهنده سیستم به گونه‌ای با هم در ارتباط هستند که رفتار کل سیستم فراتر از ویژگی‌های عناصر تشکیل‌دهنده آن می‌باشد. فعالیت‌های مالی در عمق خود مانند فعالیت‌های انسانی و اجتماعی می‌باشند که با عواملی مرتبط با انسان نظیر نیاز، طمع، ادراک و اشتباه (نوفه)^۴ همراه است. لذا می‌توان بازارهای مالی را به عنوان سیستمی پیچیده در نظر گرفته و از این طریق دنبال تبیین رفتارها و ویژگی‌های کل سیستم بود. این حوزه از اقتصاد با رویکردی نو به دنبال حل مسائل پیچیده و مطرح در اقتصاد می‌باشد.

یکی از موضوعات مطرح در حوزه‌های نوین مطالعات اقتصادی، کاربرد تئوری ماتریس‌های تصادفی در مطالعات سرمایه‌گذاری و بهینه‌سازی پرتفولیو^۵ می‌باشد. این موضوع، از مباحث مطرح در فیزیک آماری می‌باشد که توسط دانشمندان در حوزه‌های مختلفی مانند تئوری کوانتوم، آشوب، هواشناسی، ترافیک اینترنت، واکنش مغز و ... استفاده شده است و به عنوان جدیدترین کاربرد آن در مباحث بهینه‌سازی پرتفولیو بکار گرفته می‌شود.

هدف غایی این پژوهش آن است که با استفاده از روش‌های کمی نوین، به ارائه روشی جهت ارتقای مدیریت ریسک سبد دارایی‌ها در بورس اوراق بهادار تهران بپردازد. نقطه تمرکز و محوریت پژوهش، جداسازی اطلاعات قابل اتکای ماتریس کواریانس از اطلاعات نوفه‌ای آن بر اساس تئوری ماتریس‌های تصادفی می‌باشد. سؤال اصلی تحقیق آن است که آیا استفاده از ماتریس کواریانس نوفه‌زدایی شده، ریسک واقعی پرتفولیوهای بهینه را کاهش می‌دهد یا خیر. در بخش بعد مروری بر تحقیقات مرتبط با موضوع نوفه در بازارهای مالی و نیز کاربرد نظریه ماتریس‌های تصادفی در بهینه‌سازی پرتفولیو ارائه شده است. در بخش سوم به تبیین اهمیت ماتریس واریانس - کواریانس در مدل مارکویتز و تأثیرگذاری نوفه بر آن پرداخته شده است و میزان تطابق رفتار ماتریس کواریانس بازار بورس تهران با ویژگی‌های ماتریس‌های تصادفی بررسی شده است. در بخش چهارم به بیان روش تحقیق و بررسی داده‌ها و میزان مؤثر بودن نوفه‌زدایی در تعیین مرز کارا و امکان کاهش ریسک واقعی پرتفولیوهای بهینه پرداخته و در نهایت نتیجه‌گیری و پیشنهادات ارائه شده است.

1. Econophysics
2. Phynance
3. Complex Systems
4. Noise
5. Portfolio optimization

۱- مروری بر مطالعات انجام شده

فیشر بلک^۱ (۱۹۸۶) در مقاله بنیانی و معروف خود با نام «نوفه» برای اولین بار به تعریف مفهوم نوفه در بازارهای مالی پرداخت. به بیان او نوفه هر داده‌ای است که حاوی اطلاعات نمی‌باشد. به عبارت دیگر نوفه در مقابل اطلاعات تعریف می‌گردد.

هرچند مقاله بلک صرفاً تعریفی و توصیفی بوده و به تبیین ابعاد مفهومی نوفه می‌پردازد، اما پس از آن محققین زیادی از جمله: ترومن^۲ (۱۹۸۸)، دلانگ^۳ و همکاران (۱۹۹۰، ۱۹۹۱)، شلیفر و سامرز^۴ (۱۹۹۰)، کمپیل^۵ (۱۹۹۳)، کلی^۶ (۱۹۹۷)، سیرپولوس و تیتسیس^۷ (۲۰۰۲)، چلی^۸ (۲۰۰۳)، بندی و روسل^۹ (۲۰۰۶)، یانگ هو^{۱۰} (۲۰۰۶)، ورماس^{۱۱} (۲۰۰۷)، اسکروگز^{۱۲} (۲۰۰۷)، برکمن و کچ^{۱۳} (۲۰۰۸)، کورو^{۱۴} (۲۰۰۸) و ورنما^{۱۵} (۲۰۰۸) به ارائه روش‌های مختلف کمی در شناسایی نوفه با رویکردهای مختلف پرداخته‌اند. به طوری کلی می‌توان پژوهش‌های این دست را با موضوعاتی مانند بهینه‌سازی پرتفولیو، تأثیر بر کارایی بازار، ریزساختار بازار، تأثیر بر عوامل تبیین ریسک، تخمین سطح نوفه و ... یافت که از بعدی در طبقه مالی رفتاری^{۱۶} و از بعدی دیگر در مالی محاسباتی^{۱۷} قرار می‌گیرد و همچنان در حال تکامل می‌باشد. این موضوع یکی از موضوعات مطرح در پارادایم مالی نوین می‌باشد.

تئوری ماتریس‌های تصادفی از دهه ۵۰ و ۶۰ میلادی توسط ویگنر^{۱۸} (۱۹۵۱) و مهتا^{۱۹} (۱۹۶۷) در مباحث ریاضی و فیزیک آماری مطرح شده است اما کاربرد آن در حوزه علوم اقتصادی و تجزیه و تحلیل ماتریس کواریانس سهام و داده‌های زمانی بازارهای مالی بحثی کاملاً نو می‌باشد که از سال ۱۹۹۹ آغاز شده و اکثر پژوهش‌های مربوط به آن از سال ۲۰۰۰ به بعد انجام شده است. از آن جمله می‌توان به لالوکس^{۲۰} و همکاران (۱۹۹۹)، سنگوپتا^{۲۱} (۱۹۹۹)، بوچاد و پوتر^۱

-
1. Black, Fischer
 2. Trueman, Brett
 3. De Long, J.B.
 4. Shleifer A., Summers L.H.
 5. Campbell, John Y.
 6. Kelly, Morgan
 7. Siriopoulos, Costas, Leontitis, Alexandros
 8. Chelley-Steeley, Patricia
 9. Bandi, Federico M., Russell, Jeffrey R.
 10. Yang Hu, Shing
 11. Verma, Rahul
 12. Scruggs, John T.
 13. Berkman, Henk, Koch, Paul
 14. Kurov, Alexander
 15. Vuorenmaa, Tommi
 16. Behavioral Finance
 17. Quantitative Finance
 18. Wigner, E.P.
 19. Mehta M. L.
 20. Laloux L., Cizeau
 21. Sengupta A.M.

(۲۰۰۰)، پلرو^۲ و همکاران (۱۹۹۹، ۲۰۰۱)، بوردا^۳ و همکاران (۲۰۰۳، ۲۰۰۴)، پافکا و کندر^۴ (۲۰۰۲، ۲۰۰۳)، مالورجن و سرنته^۵ (۲۰۰۴)، جسی پاپ^۶ و همکاران (۲۰۰۵)، مارتینز^۷ (۲۰۰۶)، کوکور^۸ و همکاران (۲۰۰۷) و دالی^۹ و همکاران (۲۰۰۸) اشاره کرد.

یکی از پژوهش‌های اولیه و قابل توجه در این زمینه توسط لالوکس و همکاران (۱۹۹۹) انجام شده است. آن‌ها در پژوهش خود رفتار مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس کواریانس ۴۰۶ سهم از سهام S&P500 در بورس نیویورک را بررسی کرده‌اند و یافته‌اند که در محدوده‌ای از مقادیر ویژه، رفتار کواریانس سهام نوفه‌ای می‌باشد و با ماتریس کواریانس نوفه‌زدایی شده به نتایج بهتری در ریسک پرتفولیوهای بهینه دست یافته‌اند.

علاوه بر مطالعات انجام شده در بازارهای سرمایه آمریکا، درودز^{۱۰} و همکاران (۲۰۰۰، ۲۰۰۱) به مطالعه بازار سرمایه و شاخص DAX آلمان و اتسوگی^{۱۱} و همکاران (۲۰۰۴) به مطالعه بازار سهام ژاپن پرداخته و به نتایج مشابهی دست یافته‌اند.

همچنین در بازارهای نوظهور نیز بررسی‌های مشابهی انجام شده است. به عنوان مثال کوکور و همکاران (۲۰۰۷) در بورس اوراق بهادار ترکیه ماتریس کواریانس را بررسی کرده است و مارتینز (۲۰۰۶) به بررسی توزیع مقادیر ویژه نوفه‌ای در بورس اوراق بهادار برزیل پرداخته است. اگرچه نتیجه تحقیق آن‌ها و تطابق رفتار بخش تصادفی ماتریس کواریانس سهام در این کشورها به دقت تحقیق لالوکس در بورس نیویورک نبوده، اما به میزان قابل توجهی قادر به تفکیک مقادیر ویژه نوفه‌ای از اطلاعات واقعی بوده است.

ماسلو^{۱۲} (۲۰۰۱)، ویلکگس و جسی^{۱۳} (۲۰۰۴)، جانگ^{۱۴} و همکاران (۲۰۰۶) در کره جنوبی و کولکarni و دتو^{۱۵} (۲۰۰۷) در هند نیز در تحقیقاتی مستقل در بازارهای مختلف نشان داده‌اند که بخشی از مقادیر ویژه ماتریس‌های کواریانس به صورت نوفه‌ای بوده و حاوی اطلاعات واقعی بازار نمی‌باشند. در تحقیقات پافکا (۲۰۰۴) و بوچاد (۲۰۰۷) نیز بیان شده است که کاربرد نظریه ماتریس‌های تصادفی

1. Bouchaud J.P., Potter M.
2. Plerou V.
3. Burda Z.
4. Pafka S., Kondor I.
5. Malevergne Y., Sornette D.
6. Papp G.
7. Martins Andre C.R.
8. Cukur, Sadik
9. Daly, J.
10. Drozd S.
11. Utsugi, Akihiko
12. Maslov, Sergei
13. Wilcox D., Gebbie T.
14. Jung W.
15. Kulkarni, Varsha and Deo, Nivedita

در حل مسائل مطرح در سرمایه‌گذاری با ابعاد بزرگ (بهبودسازی با تعداد سهام زیاد) روش مناسبی است. در ایران تاکنون درباره کاربرد نظریه ماتریس‌های تصادفی در بهبودسازی پرتفولیو و در حوزه مطالعات سرمایه‌گذاری، پژوهشی صورت نگرفته است.

۲- مدل مارکوویتز و ماتریس واریانس - کواریانس نوفه‌زدایی شده

مسئله مورد بررسی در این پژوهش را می‌توان نقطه تلاقی چند موضوع مختلف علمی دانست که به هدف بهبودسازی پرتفولیو مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مبحث نوفه در اقتصاد و بازارهای مالی و روش‌های مختلف شناسایی چگونگی شکل‌گیری داده‌های بدون اطلاعات در بازار سهام از وجهی، نظریه ماتریس‌های تصادفی و بررسی ویژگی‌های آن‌ها در فیزیک آماری از وجهی دیگر و مسئله کلاسیک بهبودسازی پرتفولیو (میانگین - واریانس) از وجه سوم، زوایای پژوهش در این موضوع را شکل می‌دهند.

پایه‌های نظریه نوین پرتفولیو بر اساس پژوهش هری مارکوویتز^۱ (۱۹۵۲) شکل گرفت. هرچند نام نوین به صورت سنتی بر این نظریه به جا مانده است و امروزه این روش (میانگین - واریانس) با وجود استفاده فراوان، در طبقه‌بندی کلاسیک قرار می‌گیرد، اما آنچه مارکوویتز ارائه کرد باعث تحولی در مطالعات بازار سهام شد. به طور چکیده پژوهش او ارائه مدلی صریح بین بازده و ریسک (واریانس) پرتفولیو و تبیین بهترین ترکیب سبد سهام و مرز کارا بود. نقطه ارتباط این موضوع با مبحث تئوری ماتریس‌های تصادفی و همچنین مبحث نوفه در بازار مالی، در آن است که یکی از ارکان مدل بهبودسازی مارکوویتز، ماتریس کواریانس سهام می‌باشد و بررسی ویژگی‌های این ماتریس بر اساس ویژگی‌های ماتریس‌های تصادفی می‌تواند روشی جهت شناسایی نوفه در بازارهای مالی باشد. مارکوویتز بیان می‌دارد که باید برای بدست آوردن ترکیب بهینه اوزان سهام در پرتفولیو از کواریانس مورد انتظار بین سهام استفاده کرد. بدین منظور رسیدن به پرتفولیوی کارا در یک سطح از بازده مورد انتظار از پرتفولیو، از طریق حل مسئله بهبودسازی درجه دو، مقید به دو محدودیت حاصل می‌گردد. تابع هدف این مسأله بهبودسازی، میزان ریسک پرتفولیو است که باید کمینه شود و دو محدودیت مسئله مرتبط با برابر یک بودن جمع کلبه اوزان و نیز برآورده کردن بازده مورد انتظار پرتفولیو می‌باشد. اگر N تعداد سهام پرتفولیو و C ماتریس کواریانس مورد انتظار بین سهام و W بردار اوزان سهام پرتفولیو و R_i بازده مورد انتظار هر سهم باشد، بیان ماتریسی تعیین پرتفولیوی کارا به صورت زیر می‌باشد:

1. Markowitz, Harry M.

$$\sigma_p^2 = T \frac{\sum_{i=1}^N W_i^2 R_i^2}{\sum_{i=1}^N W_i^2} \quad (1)$$

$$\text{S.T: } \sum_{i=1}^N W_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^N W_i * R_i = R_p$$

$$W_i \geq 0$$

در عبارت فوق بالا نویسنده نشان دهنده ترانزیت ماتریس است. مدل در حالت مجاز نبودن فروش استقرایی ارائه شده است و اوزان هر سهم باید نامنفی و جمع آنها برابر یک باشد. متغیر تصمیم در این مسئله «اوزان سهام» می باشد که به دنبال بدست آوردن W^* یا اوزان بهینه برای سرمایه گذاری می باشیم. با حل مسئله فوق به ازای بازده های مختلف مورد انتظار و دست یافتنی پرتفولیو (R_p)، به مرز کارا دست می یابیم. به بیان دیگر مرز کارا بهترین ترکیب اوزان سهام پرتفولیو در هر سطح از ریسک یا بازده می باشد که از بین تمامی ترکیب های مختلف ممکن بدست آمده اند.

نکته مهم در این مدل، مفهوم «مورد انتظار بودن» ماتریس کواریانس می باشد. به بیان دیگر بر اساس انتظار و یا پیش بینی که از روابط بین سهام در آینده داریم، اقدام به تعیین اوزان بهینه سهام جهت سرمایه گذاری در دوره آتی می نماییم. در محاسبات فعالان و سرمایه گذاران بازار سرمایه در دنیای واقع، کواریانس موجود بین سهام به عنوان کواریانس مورد انتظار سهام بکار گرفته می شود و اوزان بهینه جهت سرمایه گذاری به سرمایه گذاران ارائه می گردد.

حال در صددیم مشخصات و رفتارهای شناخته شده ماتریس های تصادفی را با ماتریس کواریانس سهام مقایسه کرده و بخشی از آن را که رفتار تصادفی دارد و حاوی اطلاعات واقعی رفتار حاکم بین سهام نیست را به عنوان نوفه شناسایی کرده و ماتریس کواریانس خالص شده^۱ را جایگزین ماتریس تجربی^۲ کرده و اوزان بهینه سهام را مجدداً بدست بیآوریم و عملکرد آنها را با اوزان بهینه بدست آمده بر اساس ماتریس تجربی مقایسه کنیم.

در مباحث ماتریس های تصادفی، مؤلفه های مهم ماتریس ها از جمله مقادیر ویژه^۳ و بردارهای ویژه^۴ و توابع چگالی آنها بررسی می گردد. در زیر ما نشان می دهیم که جواب بهینه تابع هدف مسئله بهینه سازی مدل مارکوویتز (کمینه کردن ریسک) که تابعی درجه دو می باشد به طوری اساسی مبتنی بر مقادیر ویژه کوچک ماتریس کواریانس می باشد.

-
1. Denoised Covariance Matrix
 2. Empirical Covariance Matrix
 3. Eigen value
 4. Eigen vector

در مباحث جبر خطی مقدار ویژه و بردار ویژه از طریق حل معادله زیر بدست می‌آید:

$$C * V = \lambda V \Rightarrow (C - \lambda I) * V = \bar{0} \Rightarrow |C - \lambda I| = 0$$

که C همان ماتریس مربعی مورد نظر (ماتریس کواریانس) و V بردار ویژه و λ مقدار ویژه می‌باشد. هر مقدار ویژه با یک بردار ویژه متناظر است.

همچنین بر اساس تجزیه طیفی^۱ می‌توان ماتریس‌های متقارن را به صورت زیر تجزیه کرد، به طوری که ستون‌های ماتریس V بردارهای ویژه ماتریس C و عناصر ماتریس قطری D مقادیر ویژه ماتریس C می‌باشند.

حال به بسط تابع هدف مدل مارکویتز می‌پردازیم:

$$\min \sigma_p^2 = w^T * C * W$$

$$= W^T * (V * D * V^T) * W = (W^T * V) * D * (V^T * W)$$

حال مقدار $V^T * W$ را که یک بردار ستونی می‌باشد با بردار ستونی $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

جایگذاری می‌کنیم:

$$= (V^T * W)^T * D * (V^T * W) = y^T * D * y$$

در نهایت مقدار تابع هدف به صورت زیر خواهد بود:

$$\min \sigma_p^2 = W^T * C * W =$$

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_N y_N^2 \quad (۲)$$

که در آن متغیر تصمیم y_i ها می‌باشند. $y_i = V_i^T * W$ ، ضرب ترانزاده بردار ویژه i ام در بردار وزن‌ها).

حال با نگاهی کلی به معادله بسط یافته تابع هدف، معادله (۲)، درمی‌یابیم که ریسک پرتفولیو به طوری منسجم وابسته به ضرایب عبارت‌های فوق یعنی همان λ ها یا مقادیر ویژه ماتریس کواریانس می‌باشد. از آنجا که هر ماتریس کواریانس، مثبت معین است و مقادیر ویژه آن مثبت می‌باشند و نیز ضرایب مقادیر ویژه در عبارت نهایی فوق همگی درجه دو و مثبت می‌باشند، در زمانی که تابع فوق به صورت مسئله بهینه‌سازی مطرح می‌شود و باید کمینه گردد، الگوریتم کمینه‌سازی در بدست آوردن y_i ها، برای آنکه کوچک‌ترین مقدار را برای تابع هدف که همان ریسک می‌باشد بدست دهد، با تخصیص ضریب به مقادیر ویژه کوچک سعی بر برآورده‌سازی محدودیت‌های مسئله و رسیدن به کمینه‌ترین جواب موجه را دارد. لذا مقادیر ویژه کوچک ماتریس کواریانس در جواب بهینه مدل مارکویتز بسیار تاثیرگذار می‌باشند.

حال به بررسی تابع چگالی مقادیر ویژه ماتریس کواریانس مبتنی بر داده‌های کاملاً تصادفی می‌پردازیم و آن را با چگالی مقادیر ویژه ماتریس کواریانس داده‌های تجربی بازار مقایسه می‌کنیم. در نظریه ماتریس‌های تصادفی بیان می‌گردد که اگر بر اساس ماتریس کاملاً تصادفی M با N سطر و T ستون، (که داده‌های آن دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار یک هستند) اقدام به تشکیل ماتریس کواریانس تصادفی C با تعداد سطر و ستون N بکنیم، در صورتی که T و N بسیار بزرگ بوده و میل به بی‌نهایت کنند و نسبت $T/N = Q \geq 1$ باشد، تابع توزیع مقادیر ویژه آن به صورت زیر می‌باشد:

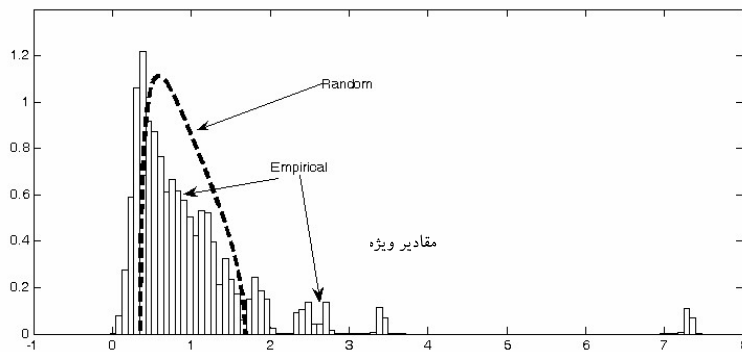
$$\rho_C \lambda = \frac{\sqrt{\lambda_{\max} \lambda \lambda - \lambda_{\min}}}{\pi \sigma^2 \lambda} \quad (1)$$

که در آن تمامی مقادیر ویژه بین مقادیر ویژه کمینه و بیشینه λ_{\max} و λ_{\min} قرار می‌گیرند. مقادیر ویژه کمینه و بیشینه به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$\lambda_{\min}^{\max} \sigma^2 = \frac{\sqrt{\lambda_{\max} \lambda \lambda - \lambda_{\min}}}{\pi} \quad (2)$$

که در آن σ^2 واریانس مقادیر ماتریس M می‌باشد که بر اساس نرمال‌سازی، برابر یک می‌باشد. در صورتی که N محدود باشد، $\sigma^2 = 1 - (\lambda_{\max}/N)$ خواهد بود.

برای مقایسه تابع توزیع مقادیر ویژه ماتریس تصادفی با ماتریس کواریانس مبتنی بر داده‌های بازار، نمونه‌ای از بازار بورس اوراق بهادار تهران را مورد بررسی قرار داده‌ایم. این نمونه تجربی شامل ۷۰ شرکت پر معامله در بازه زمانی ۱۰۲۰ روز معاملاتی (فروردین ۱۳۸۳ تا خرداد ۱۳۸۷) می‌باشد. توزیع مقادیر ویژه ماتریس کواریانس تجربی با تابع توزیع مقادیر ویژه ماتریس تصادفی در شکل ۱ مقایسه شده‌اند.



شکل (۱): توزیع مقادیر ویژه ماتریس کواریانس تصادفی در مقایسه با ماتریس کواریانس تجربی بورس تهران

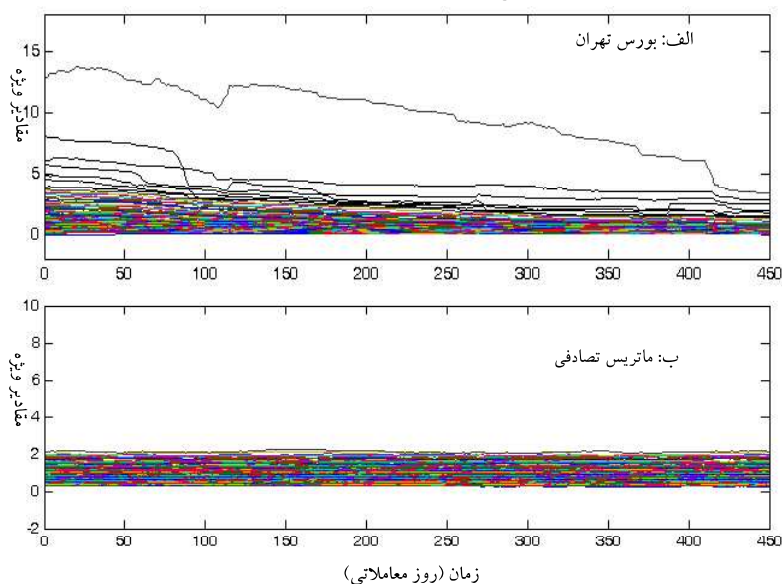
در شکل (۱)، نمودار خط چین مربوط به توزیع مقادیر ویژه ماتریس کاملاً تصادفی (که تماماً حاوی نوفه می‌باشد و اطلاعات ندارد) بوده و نمودار ستونی مرتبط با توزیع مقادیر ویژه ماتریس کواریانس تجربی بازار بورس تهران می‌باشد. با مقایسه این دو، در می‌یابیم که الگوی توزیع مقادیر ویژه ماتریس کواریانس تجربی در محدوده مقادیر ویژه کوچک، بسیار شبیه به توزیع ماتریس کواریانس تصادفی می‌باشد. از آنجا که ماتریس کواریانس تصادفی بر اساس تعریف، کاملاً تصادفی می‌باشد و حاوی اطلاعات بازار نیست، لذا می‌توان گفت که مقادیر ویژه ماتریس کواریانس تجربی نیز در محدوده مقادیر ویژه کوچک (کمتر از λ_{max}) رفتاری شبیه به مقادیر ویژه تصادفی داشته و دارای نوفه می‌باشد و منعکس‌کننده رفتار پایداری بین سهام نمی‌باشد.

همچنین در محدوده مقادیر ویژه بزرگ، (بزرگتر از λ_{max}) مقادیر ویژه‌ای از ماتریس کواریانس تجربی وجود دارند که حاوی اطلاعات می‌باشند و کاملاً خارج از دامنه مقادیر ویژه تصادفی قرار گرفته‌اند که منعکس‌کننده روابط پایدار و قابل اتکاء در بازار می‌باشند.

از سویی دیگر، در توضیح رابطه (۲) بیان شد که مقادیر ویژه کوچک ماتریس کواریانس در جواب بهینه مدل مارکویتز بسیار تأثیرگذار می‌باشند، در حالی که در بالا به این نتیجه دست یافتیم که این مقادیر ویژه کوچک بسیار نوفه‌ای بوده و مطابق با شرایط تصادفی بوجود آمده‌اند و قابل اتکاء نیستند. لذا با مقایسه این نتایج، در بهینه‌سازی پرتفولیو، ضروری به نظر می‌رسد که تأثیر مقادیر ویژه نوفه‌ای را از ماتریس کواریانس تجربی زدوده و به ماتریس کواریانس خالص شده دست یابیم، و مجدداً بر اساس آن به تعیین مرز کارا پرداخته و نتایج این روش بهینه‌سازی پرتفولیو را با روش مبتنی بر ماتریس کواریانس تجربی مقایسه کنیم.

مقادیر ویژه در تشکیل هر یک از عناصر ماتریس کواریانس تأثیرگذار می‌باشند. مبتنی بر آنچه که بیان شد، مقادیر ویژه همگی حاوی اطلاعات نیستند. لذا در تشکیل عناصر ماتریس کواریانس بدلیل وجود مقادیر ویژه نوفه‌ای، رابطه بین بازده سهام همراه با نوفه خواهد بود. ماتریس کواریانس نوفه‌زدایی شده در حقیقت ماتریس کواریانسی است که عناصر آن بر اساس مقادیر ویژه حاوی اطلاعات تشکیل شده‌اند و اثر مقادیر ویژه نوفه‌ای حذف شده است. برای دستیابی به ماتریس کواریانس نوفه‌زدایی شده، شناسایی مقادیر ویژه نوفه‌ای و تفکیک آن از مقادیر ویژه حاوی اطلاعات بسیار حائز اهمیت می‌باشد، که این تفکیک از طریق رابطه ۴ بدست می‌آید. به طوری که با محاسبه حد بالای مقادیر ویژه تصادفی (λ_{max})، آن مقادیر ویژه‌ای از ماتریس کواریانس که پایین این حد قرار می‌گیرد به عنوان مقادیر ویژه نوفه‌ای شناسایی می‌گردد.

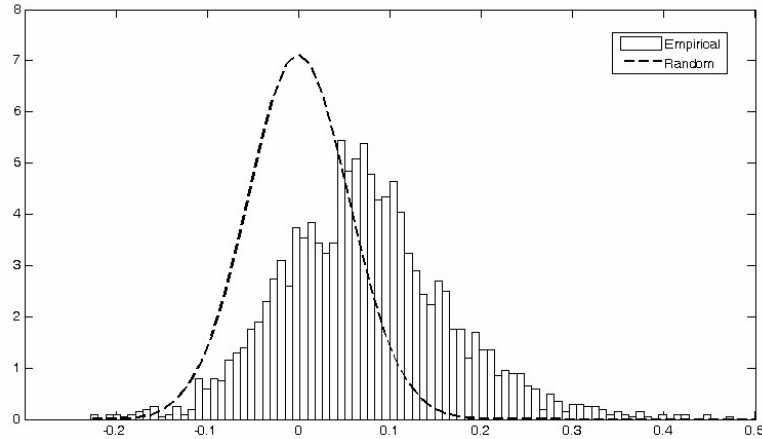
اگر ماتریس کواریانس را در یک بازه محاسبه کرده و آن را در طول دوره‌ای از زمان حرکت دهیم و برای هر ماتریس کواریانس مقادیر ویژه را محاسبه و رسم کنیم به روند حرکت مقادیر ویژه ماتریس کواریانس دست می‌یابیم. در شکل ۲ قسمت الف، نمودار تغییرات مقادیر ویژه ماتریس کواریانس تجربی بورس تهران برای ۷۰ شرکت مذکور در پنجاه‌ای ۳۰۰ روزه و در طول ۴۵۰ روز حرکت آن، نمایش داده شده است. در قسمت ب، روند تغییرات مقادیر ویژه ماتریس کواریانس تصادفی ترسیم شده است. به خوبی می‌توان درک کرد که رفتار مقادیر ویژه کوچک ماتریس تصادفی و تجربی در بازه زیر مقدار λ_{max} مشابه هم بوده و نوفه‌ای می‌باشد. در شکل الف هر چه در راستای محور عمودی حرکت کنیم، مقادیر ویژه ماتریس تجربی، از رفتار تصادفی خارج شده و حاوی اطلاعات می‌گردند.



شکل (۲): تغییرات مقادیر ویژه ماتریس کواریانس تجربی بورس تهران در مقایسه با

ماتریس کواریانس تصادفی

در نمونه مورد مطالعه بورس تهران، از میان ۷۰ مقدار ویژه، ۱۰ مقدار ویژه ماتریس تجربی بالاتر از مقدار λ_{max} قرار گرفته‌اند. این بدان معناست که ۱۰ عامل اصلی و تعیین کننده بر رفتار این مجموعه از سهام تأثیرگذار می‌باشد. مقایسه ویژگی‌های ماتریس‌های کاملاً تصادفی با ماتریس تجربی امکان شناخت بهتر میزان وجود اطلاعات مرتبط در ماتریس تجربی را فراهم می‌کند. شکل ۳ نشان‌دهنده تابع چگالی عناصر ماتریس کواریانس تصادفی و مقایسه آن با ماتریس تجربی می‌باشد.



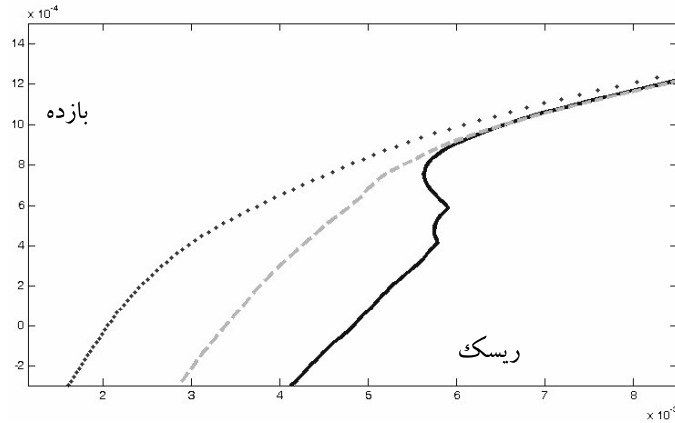
شکل (۳): مقایسه توزیع عناصر ماتریس کواریانس تصادفی و ماتریس کواریانس تجربی بورس تهران نمودار خط چین، نشان‌دهنده تابع چگالی عناصر یک ماتریس کاملاً تصادفی می‌باشد و نمودار میله‌ای توزیع عناصر ماتریس کواریانس تجربی بورس تهران می‌باشد. می‌توان مشاهده کرد که مقادیر عناصر ماتریس تجربی در محدوده‌ای مشترک با ماتریس تصادفی، احتمال بیشتری به تصادفی بودن دارند. لذا حذف تأثیر مقادیر نوفه‌ای، موضوعی جهت بررسی امکان بهینه‌سازی پرتفولیو می‌باشد.

۳- روش، داده‌ها و نتایج تجربی

به جهت بررسی میزان موفقیت پرتفولیوهای حاصل از کواریانس تجربی و کواریانس نوفه زدایی شده، کل دوره زمانی مورد مطالعه که شامل ۱۰۲۰ روز معاملاتی در بازه فروردین ۱۳۸۳ تا خرداد ۱۳۸۷ می‌باشد را به دو بخش تقسیم می‌کنیم. این اطلاعات مربوط به ۷۰ شرکت معامله در این بازه زمانی در بورس اوراق بهادار تهران می‌باشد که به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند. بر اساس اطلاعات بخش اول داده‌ها به محاسبه ماتریس کواریانس تجربی و خالص می‌پردازیم و سپس بهترین اوزان سهام پرتفولیوها را بر اساس هر کدام از ماتریس‌ها، جهت سرمایه‌گذاری در دوره بعد بدست می‌آوریم. سپس عملکرد هر کدام از این دو مجموعه پرتفولیو را در دوره بعد اندازه‌گیری می‌کنیم و عملکرد آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که آیا نتایج عملکرد آن‌ها با هم تفاوت معنی‌داری دارد یا خیر و اگر تفاوت دارند کدام روش بهتر عمل می‌کند. به عبارت دیگر از بین ماتریس کواریانس تجربی و خالص، کدامیک ماتریس کواریانس مورد انتظار بهتری برای آینده می‌باشد.

برای انجام آزمون فرضیه تحقیق به جهت مقایسه واریانس‌ها از توزیع فیشر استفاده شده است. برای بدست آوردن پرتفولیوی کارا، علاوه بر ماتریس کواریانس مورد انتظار، نیاز به بردار بازده مورد انتظار سهام تشکیل‌دهنده پرتفولیو نیز هست. انحراف ریسک و بازده واقعی هر پرتفولیو از مرز کارای قابل حصول، منبعت از عدم پیش‌بینی صحیح کواریانس مورد انتظار و نیز بازده مورد انتظار هر سهم می‌باشد. از آنجا که هدف ما بررسی امکان بهینه‌سازی پرتفولیو از طریق دستیابی به ماتریس کواریانس مورد انتظار پالایش شده می‌باشد، نیاز به کنترل انحراف ناشی از بردار بازده مورد انتظار سهام وجود دارد تا بتوانیم عملکرد ماتریس‌های کواریانس تجربی و خالص را بدون دخالت عوامل دیگر به درستی بیازماییم. لذا برای اندازه‌گیری عملکرد واقعی پرتفولیوها به طور مشترک از بردار بازده مورد انتظار محاسبه شده در دوره اول استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم پیش‌بینی بردار بازده مورد انتظار سهام بسیار نزدیک به واقع انجام شده است. در این صورت تمایز رفتار ریسک و بازده مجموعه پرتفولیوی ماتریس تجربی و خالص، صرفاً ناشی از ماتریس‌های کواریانس تجربی و خالص خواهد بود و توانایی قضاوت عملکرد آن‌ها را برایمان فراهم می‌کند.

بازده به صورت روزانه و لگاریتمی محاسبه شده است. همچنین بدلیل آنکه برخی از سهام در برخی از روزها معامله نداشته‌اند، کواریانس بین سهام به صورت دو به دو محاسبه شده و روزهای بدون معامله حذف شده‌اند و از آن طریق ماتریس کواریانس بدست آمده است. یکی از محدودیت‌های جدی تحقیق، تعداد محدود شرکت‌های پیر معامله در بورس تهران بود. برای گردآوری اطلاعات بازار بورس تهران، از نرم افزار تدبیر پرداز استفاده شده است و در مجموع بیش از ۷۰۰۰۰ داده خام استخراج شده است. به جهت پردازش اطلاعات، محاسبات روش نوفه‌زدایی، بهینه‌سازی پرتفولیو و اندازه‌گیری عملکرد واقعی پرتفولیوها و رسم نمودارها، از نرم افزار MATLAB (7.0.4) بهره گرفته شده است. به جهت انتقال حجم اطلاعات خام به نرم افزار متلب از نرم افزار EXCEL (2007) استفاده شده است. بر اساس ماتریس کواریانس تجربی و نوفه‌زدایی شده اقدام به تشکیل پرتفولیوهای کارا نموده و اوزان بهینه سرمایه‌گذاری در هر سهم را بدست می‌آوریم. شکل ۴ رابطه ریسک و بازده هر کدام از این دو مجموعه پرتفولیو در زمان سرمایه‌گذاری را نشان می‌دهد. در شکل، خط ممتد نشان‌دهنده عملکرد واقعی ریسک و بازده مجموعه پرتفولیوی بدست آمده بر اساس ماتریس کواریانس تجربی می‌باشد. خط چین نشان‌دهنده مجموعه پرتفولیوی بدست آمده بر اساس ماتریس کواریانس نوفه‌زدایی شده و خط نقطه چین نشان‌دهنده بهترین ترکیب ریسک و بازده ممکن در زمان سرمایه‌گذاری می‌باشد که بر اساس کواریانس تحقق یافته در بخش دوم داده‌ها بدست آمده است.



شکل (۴): مقایسه مرز کارا بر اساس اطلاعات تجربی و نوفه زدایی شده

نکته مهم آن است که ماتریس کواریانس نوفه‌زدایی شده بهتر از ماتریس کواریانس تجربی توانسته است بر اساس اطلاعات دوره اول، کواریانس تحقق یافته در زمان آینده را جهت سرمایه‌گذاری در دوره دوم تعیین کند و نتیجه آن، نزدیک‌تر بودن عملکرد آن به بهترین ترکیب ممکن و قابل حصول در زمان سرمایه‌گذاری می‌باشد.

چنانکه در شکل ۴ مشخص است، سرمایه‌گذاری بر اساس ماتریس کواریانس خالص نسبت به ماتریس کواریانس تجربی، در هر سطح از ریسک، بازده بیشتر و یا در هر سطح از بازده، ریسک کمتری را محقق کرده است.

در نهایت نتیجه آزمون فرضیه تحقیق، مبنی بر کمتر بودن ریسک مجموعه پرتفولیوی بدست آمده بر اساس ماتریس کواریانس نوفه‌زدایی شده نسبت به ماتریس کواریانس تجربی ارائه می‌گردد. به عبارت دیگر معنی‌داری تفاوت نمودار ممتد و خط چین در شکل ۴، به طور آماری نیز مورد آزمون قرار گرفته است. آزمون فیشر برای مقایسه واریانس‌ها بکار گرفته شده است. آماره آزمون فیشر به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\frac{(v_1, v_2)}{2 \quad 2}$$

که ۱ و ۲ به ترتیب درجه آزادی ۱ و ۲ با توزیع کای دومی باشند.

فرضیه‌های آزمون به این صورت تعریف می‌گردند:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_{Denoised}^2 \geq \sigma_{Noisy}^2 & (\text{نقض ادعا}) \\ H_1 : \sigma_{Denoised}^2 < \sigma_{Noisy}^2 & (\text{ادعای فرضیه تحقیق}) \end{cases}$$

تعداد پورتفولیوهای محاسبه شده بر اساس اطلاعات نوفه‌زدایی شده و اطلاعات تجربی به ترتیب ۱۳۱ و ۱۵۵ عدد بوده است که تعیین‌کننده ۱ و ۲ می‌باشند. مقدار بدست آمده آماره فیش ۰/۶۱ می‌باشد. در احتمال خطای نوع اول برابر ۰/۵، مقدار بحرانی توزیع فیش ۰/۷۵ می‌باشد. بنابراین مقدار آماره آزمون در محدوده بحرانی قرار گرفته و فرض H_0 رد می‌گردد. در نتیجه می‌توان گفت ادعای فرضیه تحقیق مورد تأیید قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر، در سطح اطمینان ۰/۹۵ ریسک مجموعه پورتفولیوی بدست آمده بر اساس ماتریس کواریانس نوفه‌زدایی شده نسبت به ماتریس کواریانس تجربی کمتر می‌باشد. همچنین نتایج آزمون در سطح ۰/۹۹ نیز مورد تأیید قرار گرفت.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق با رویکردی محاسباتی، نشان دادیم که بررسی دقیق‌تر ماتریس کواریانس سهام از نظر نوفه در بورس اوراق بهادار تهران نیز مانند تحقیقاتی که در بازارهای مختلف دنیا در این زمینه انجام گرفته است، مفید بوده و نتایج بهتری در مدیریت ریسک فراهم می‌کند. استفاده از تئوری ماتریس‌های تصادفی و مقایسه چگالی‌های مقادیر ویژه و عناصر آن با ماتریس تجربی بازار بورس تهران، شواهدی بر وجود نوفه در اطلاعات تجربی بازار را نشان داده و بر اساس کنترل رفتار بخش تصادفی ماتریس کواریانس تجربی و ملاک قرار دادن ماتریس کواریانس خالص در سرمایه‌گذاری، ریسک واقعی کاهش می‌یابد. تأیید این نتیجه هم‌راستا با نتایج تحقیقات انجام شده در بورس‌های توسعه یافته نظیر پژوهش لالوکس و همکاران در بورس امریکا و همچنین درودز در بورس آلمان و اتسوگی در بورس ژاپن می‌باشد. همچنین در مقایسه با مطالعات انجام شده در بازارهای نوظهور مانند پژوهش کوکور در ترکیه و مارتینز در برزیل می‌توان گفت که تطابق رفتار بخش تصادفی مقادیر ویژه ماتریس کواریانس سهام در بورس تهران با تابع چگالی مقادیر ویژه ماتریس‌های تصادفی، بیشتر بوده است. به عبارت دیگر می‌توان نتیجه گرفت که قابلیت کاهش ریسک از طریق روش نظریه ماتریس‌های رندومی در بورس تهران در مقایسه با بورس ترکیه و برزیل، بیشتر می‌باشد. آنچه در این تحقیق انجام شده است جدا سازی اطلاعات پایدار و قابل اتکای ماتریس کواریانس تجربی از نوفه یا مقادیر تصادفی و بدون اطلاعات است و سپس بر اساس این اطلاعات قابل اتکاء اقدام به تشکیل سبد دارایی‌های بهینه شده است. در واقع برای بدست آوردن ماتریس کواریانس مورد انتظار آینده، پیش‌بینی صورت نگرفته است بلکه اطلاعات موجود خالص شده و بخش قابل اتکای آن معیار قرار گرفته است. حال موضوع جالب و قابل پیگیری در این حوزه، علاوه بر خالص کردن اطلاعات ماتریس کواریانس، بررسی امکان پیش‌بینی آن بر اساس پیش‌بینی مقادیر ویژه مهم و حاوی اطلاعات آن است. چرا که با وجود عملکرد بهتر ماتریس خالص نسبت به ماتریس تجربی، همچنان ماتریس خالص با ماتریس تحقق یافته در آینده فاصله دارد و می‌توان در حوزه دست یافتن به ماتریس کواریانس مورد انتظار بهتر تحقیقات را ادامه داد.

منابع

- 1- Bandi, Federico M., Russell, Jeffrey R., "**Separating microstructure noise from volatility**", Journal of Financial Economics, No.79, 2006, pp.655-692.
- 2- Berkman, Henk, Koch, Paul D, "**Noise trading and the price formation process**", Journal of Empirical Finance, No.15, 2008, pp.232-250.
- 3- Black, Fischer, "**Noise**", Journal of Finance, No.41, 1986, pp.529-543.
- 4- Bouchaud J. P., Laloux L., Miceli M.A., Potters M., "**Large dimension forecasting models and random singular value spectra**", Eur. Phys. J. B, Vol.55, 2007, pp.201-207.
- 5- Bouchaud J.P., Potter M, "**Theory of Financial Risks, From statistical physics to risk management**", Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2000.
- 6- Burda Z., Gorlich A., Jarosz A., Jurkiewicz J, "**Signal and noise in correlation matrix**", Physica A, Statistical Mechanics and its Applications, Vol.343, No.15, 2004, pp.295-310.
- 7- Burda Z., Jurkiewicz J., Nowak M. A., Papp G. Z, "**Levy matrices and financial covariances**", Acta Physica Polonica, Series B, Vol.34, No.10, 2003, pp.4747-4763.
- 8- Campbell, John Y., Kyle, Albert S, "**Smart money, noise trading and stock price behavior**", The review of economic studies, Vol.60, No.1, 1993, pp.1-34.
- 9- Chelley-Steeley, Patricia, "**The trading mechanism, cross listed stocks:a comparison of the Paris Bourse and SEAQ International**", Int. Fin. Markets, No.13, 2003, pp.401-417.
- 10- Cukur, Sadik, Eryigit, Mehmet, Eryigit, Resul, "**Cross correlations in an emerging market financial data**", Physica A, Statistical Mechanics and its Applications, Vol.376, 2007, pp.555-564.
- 11- Daly J., Cranea M., Ruskin H.J., "**Random matrix theory filters in portfolio optimization: A stability and risk assessment**", Physica A, Statistical Mechanics and its Applications, Vol.387, No.16-17, 2008, pp.4248-4260.
- 12- De Long, J.B., Shleifer, A., Summers, L.H., Waldman, R.J, "**Noise trader risk in financial markets**", Journal of Political Economy, No.98, 1990, pp.703-738.
- 13- De Long, J.B., Shleifer, A., Summers, L.H., Waldmann, R.J, "**The Survival of Noise Traders in Financial Markets**", Journal of Business, No.64, 1991, pp.1-19.
- 14- Drozd S., Grummer F., Gorski A. Z., Ruf F., Speth J, "**Dynamics of competition between collectivity and noise in the stock market**", Physica A, Statistical Mechanics and its Applications, Vol.287, No.3-4, 2000, pp.440-449.
- 15- Drozd S., Grummer F., Ruf F., Speth J, "**Towards identifying the world stock market cross-correlations: DAX versus Dow Jones**", Physica A, Statistical Mechanics and its Applications, Vol.294, No.1-2, 2001, pp.226-234.
- 16- Jung, W., Chae S., Yang J., Moon H, "**Characteristics of the Korean stock market correlations**", Physica A, Statistical Mechanics and its Applications, Vol.361, No.1, 2006, pp.263-271.
- 17- Kelly, Morgan, "**Do Noise Traders Influence Stock Prices?**", Journal of Money, Credit and Banking, Vol.29, 1997, pp.351-363.
- 18- Kulkarni, Varsha and Deo, Nivedita, "**Correlation and volatility in an Indian stock market: A random matrix approach**", The European Physical Journal B, Condensed Matter and Complex Systems, Springer Berlin, Heidelberg, Vol.60, No.1, 2007, pp.101-109.
- 19- Kurov, Alexander, "**Information and Noise in Financial Markets: Evidence from the E-mini Index Futures**", College of Business and Economics, West Virginia University, <http://ssrn.com/abstract=1086021>.
- 20- Laloux L., Cizeau P., Bouchaud J.P., Potters M., "**Noise Dressing in Financial Correlation Matrices**", Physical Review Letters, Vol.83, No.7, 1999, pp.1467-1470.

- 21- Malevergne Y., Sornette D, "**Collective origin of the coexistence of apparent random matrix theory noise and of factors in large sample correlation matrices**", Physica A, Vol.331, No.3-4, 2004, pp.660-668.
- 22- Markowitz H, "**Portfolio Selection**", Journal of finance, Vol.7, 1952, p.91.
- 23- Martins Andre C.R, "**Non-stationary correlation matrices and noise**", Physica A, Statistical Mechanics and its Applications, Vol.379, No.2, 2007, pp.552-558.
- 24- Maslov, Sergei, "**Measures of globalization based on cross-correlations of world financial indices**", Physica A, Statistical Mechanics and its Applications, Vol.301, No.1-4,2001 , pp.397-406
- 25- Mehta M. L, "**Random matrices and the statistical theory of energy levels**", Academic press Inc., New York, 1967.
- 26- Pafka S., Kondor I, "**Noisy covariance matrices and portfolio optimization**", Eur. Phys. J. B, Vol.27, No.2, 2002, pp.277-80.
- 27- Pafka S., Kondor I, "**Noisy covariance matrices and portfolio optimization. II**", Physica A, Vol.319, 2003, pp.487-494.
- 28- Pafka S., Kondor I, "**Estimated correlation matrices and portfolio optimization**", Physica A, Statistical Mechanics and its Applications , Vol.343, 2004, pp.623-634.
- 29- Papp G., Pafkaa Sz., Nowakc M.A., Kondor I, "**Random matrix filtering in portfolio optimization**", Acta Physica Polonica B, Vol.36, No.9,2005, pp.2757-2765.
- 30- Plerou V., Gopikrishnan P., Rosenow B., Amaral L., Stanley H.E, "**Universal and Non-universal Properties of Cross Correlations in Financial Time Series**", Physical Review Letters, Vol.83, No.7, 1999, pp.1471-1474
- 31- Plerou V., Gopikrishnan P., Rosenow B., Amaral L. and Stanley H.E., "**A random matrix theory approach to financial cross-correlations**", Physica A, Vol.287, 2000, pp.374-382.
- 32- Plerou V., Gopikrishnan P., Rosenow B., Amaral L.A.N., Stanley H.E., "**Collective behavior of stock price movements A random matrix theory approach**", Physica A, Vol.299, No.1-2, 2001, pp.175-180.
- 33- Scraggs, John T, "**Noise trader risk: Evidence from the Siamese twins**", Journal of Financial Markets, No.10, 2007, pp.76-105.
- 34- Sengupta A.M., Mitra P.P, "**Distributions of Singular Values for Some Random Matrices**", Phys. Rev. E, Vol.60, 1999, pp.3389-3392.
- 35- Shleifer, A., Summers, L.H, "**The Noise Trader Approach to Finance**", Journal of Economic Perspectives, No.4, 1990, pp.19-33.
- 36- Siriopoulos, Costas, Leontitsis, Alexandros, "**Nonlinear Noise Estimation in International Capital Markets**", Multinational Finance Journal, vol.6, No.1, 2002, pp.43-63.
- 37- Trueman, Brett, "**A Theory of Noise Trading in Securities Markets**", The Journal of finance, Vol.43, No.1, 1988, pp.83-95.
- 38- Utsugi, Akihiko, Ino, Kazusumi, Oshikawa, Masaki, "**Random matrix theory analysis of cross correlations in financial markets**", Phys. Rev. E 70, 026110, 2004.
- 39- Verma, Rahul, Verma, Priti, "**Noise trading and stock market volatility**", J. of Multi. Fin. Manag., No.17, 2007, pp.231-243.
- 40- Vuorenmaa, Tommi A, (2008). "**Decimalization, Realized Volatility, and Market Microstructure Noise**", University of Helsinki, FINLAND, MPRA Paper No. 8692, <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/8692/> ISSN 17950562.
- 41- Wigner, E.P., "**On a Class of Analytic Functions from the Quantum Theory of Collisions**", Annals of Mathematics, Vol.53, No.1, 1951, pp.36-67.
- 42- Wilcox D., Gebbie T, "**On the analysis of cross-correlations in South African market data**", Physica A, 2004, pp.294-298.
- 43- Yang Hu, Shing, "**A simple estimate of noise and its determinant in a call auction market**", International Review of Financial Analysis, No.15, 2006, pp.348-362.